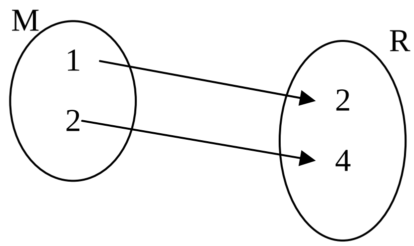
MO 7:

FUNKCIE

Funkcia

- funkcia je každá množina usporiadaných dvojíc $[x,y] \in M$, pre ktoré platí:
  ku každému $x \in M$ existuje práve jedno $y \in R$ tak, že platí $[x,y] \in f$; $y = f(x)$

- môže byť daná:
  - predpisom ($y=2x+4$)
  - tabuľkou (usporiadané dvojice) ($f =\{[1,2],[2,4],[3,6]\}$)
  - grafom
  - šípkový diagram



Definičný obor:

- množinu M budeme nazývať definičným oborom D(f) funkcie f(x)
- množina všetkých $x \in R$, ku ktorým existuje aspoň jedno $y \in R$; $y= f(x)$

Obor hodnôt:

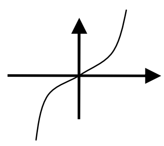
- oborom hodnôt označujeme množinu H(f), čo je množina všetkých $y \in R$, ku ktorým existuje aspoň jedno také $x \in R$, že platí $y= f(x)$.

Graf:

- graf funkcie f je množina všetkých bodov so súradnicami[x,y] v karteziánskej sústave, kde $x \in D(f)$ a $y \in H(f)$.

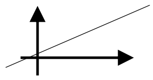
Vlastnosti:

- **párnosť:**
  - párna
    - ak $\forall\, x \in D(f)\ \exists (-x) \in D(f)$: $f(-x) = f(x)$
    - graf je súmerný podľa osi y
    - napr. $y=x^2$
  - nepárna
    - $\forall\, x \in D(f)\ \exists (-x) \in D(f)$: $f(-x) = -f(x)$
    - graf je súmerný podľa počiatku súradnicovej sústavy
    - napr. $y=x^3$

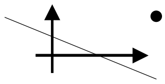


  - ani párna, ani nepárna
    - neexistuje $(-x) \in D(f)$
    - $y= \sqrt{x}$

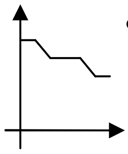
- **monotónnosť**
  - rastúca



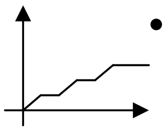
    - rastúca na množine M, ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
      $x_1 < x_2$ a $f(x_1) < f(x_2)$
  - klesajúca



    - klesajúca na množine M, ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
      $x_1 < x_2$ a $f(x_1) > f(x_2)$
  - nerastúca



    - nerastúca na množine M, ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
      $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \geq f(x_2)$
  - neklesajúca



    - neklesajúca na množine M, ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
      $x_1 < x_2$ a $f(x_1) \leq f(x_2)$
  - konštantná
    - konštantná na množine M, ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$:
      $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$
    - konštantná funkcia má ľubovolnú periódu – je periodická

- Ak funkcia LEN rastie alebo LEN klesá – je rýdzo monotónna.

- **prostá funkcia:**
  - funkcia je prostá ak pre každé dve $x_1, x_2 \in D(f)$: $x_1 \neq x_2$ tak $f(x_1) \neq f(x_2)$
  - napr. $y = x^3$
  - existuje inverzná funkcia

- **ohraničenosť:**
  - zhora: $\exists h \in R, \forall x \in D(f): f(x) \leq h$
  - zdola: $\exists d \in R, \forall x \in D(f): f(x) \geq d$
  - funkcia je ohraničená, ak je súčasne ohraničená zhora aj zdola $d \leq f(x) \leq h$
    - napr. y= sin x (h = 1, d = -1)
  - najmenšie horné ohraničenieje suprémum

- **lokálne extrémy:** nech funkcia f je definovaná v okolí bodu a:
  - maximum:
    - maximum v bode *a* má funkcia,
      ak existuje také okolie O bodu a; $\forall x \in O: f(x) \leq f(a)$
  - minimum:
    - minimum v bode *a* má funkcia,
      ak existuje také okolie O bodu a; $\forall x \in O: f(x) \geq f(a)$

MO 7: FUNKCIE

- **inverzná funkcia:**
  - nech f je prostá funkcia na D(f) a nech pre všetky x, y platí: $[x,y] \in f \Leftrightarrow [y,x] \in f^{-1}$
  - k danej funkcii f existuje inverzná funkcia práve vtedy, keď f je prostá na D(f)
  - ak je f rastúca (klesajúca), tak aj f^{-1} je rastúca (klesajúca)
  - graf inverznej funkcie f^{-1} je súmerný s grafom f podľa priamky y = x
  - $D(f) = H(f^{-1})$
    $D(f^{-1}) = H(f)$
  - napr. $y=a^x$ a $y=\log_a x$

- **periodickosť:**
  - funkcia je periodická, ak existuje p>0 tak, že:
    1.) $\forall x \in R; \forall x \in D(f) \Rightarrow [(x + p) \in D(f)] \wedge [(x - p) \in D(f)]$
    2.) $x \in D(f); f(x + p) = f(x)$

  - napr. y= sin x