MO 30:

KRUŽNICA

Kružnica:

- Kružnicou so stredom *S* a polomerom $r > 0$ nazývame množinu všetkých bodov *X* v rovine, pre ktoré platí $|SX| = r$.
- obvod = O = 2πr

Kruh:

- Množinu všetkých bodov *X* v rovine, pre ktoré platí $|SX| \leq r$ nazývame kruhom so stredom *S* a polomerom *r*. Hranicu kruhu tvorí takzvaná hraničná kružnica.
- obsah = S = πr^2

(→ S odvodíme buď: integrálom alebo pomocou n-uholníka (zväčšujeme n) – limitne)

Priemer:

- Priemerom kružnice(kruhu) rozumieme jednak číslo $d = 2r$, jednak každú úsečku dĺžky *d*, ktorej koncové body ležia na kružnici(na hraničnej kružnici). V tomto chápaní je teda priemer špeciálny prípad tetivy kružnice.
  → r = polomer

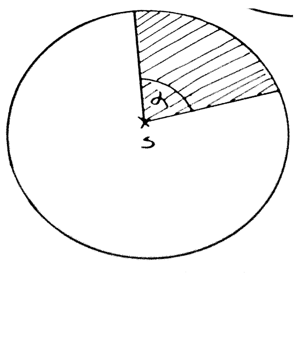
Kružnicový oblúk:

- prienik kružnice a polroviny
- Výpočet dĺžky oblúka pomocou priamej úmery:
  - α° v stupňoch:
    2πr ... 360°
    O_m ... α°
    $$\rightarrow O_m = \frac{\pi 2r}{360°}.\alpha°$$
    O_m = dĺžka oblúka
  - α v radiánoch:
    $$\rightarrow O_m = \frac{\pi 2r}{2\pi}.\alpha = r.\alpha$$

  → α je stredový uhol

Kruhový výsek :

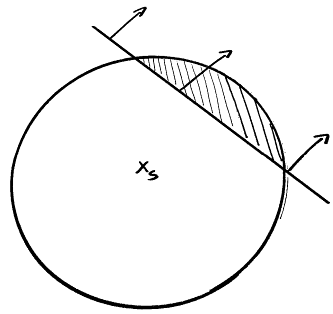
- prienik kruhu a uhla, ktorý má vrchol v strede kružnice S
- Výpočet obsahu kruhového výseku pomocou priamej úmery:
  - α° v stupňoch:
    πr^2 ... 360°
    S_v ... α°
    $$\rightarrow S_v = \frac{\pi r^2}{360°}\alpha°$$
  - α v radiánoch:
    $$\rightarrow S_v = \frac{\pi r^2}{2\pi}\alpha = \frac{r^2}{2}.\alpha$$
    S_v je obsah kruhového výseku.



MO 30: KRUŽNICA A JEJ ČASTI

Kruhový odsek:

- prienik kruhu a polroviny



$$S_{od} = S_v - S_\Delta = \frac{\pi r^2}{360^\circ}\alpha^\circ - \frac{r^2 \sin\alpha^\circ}{2} = \frac{r^2}{2}\alpha - \frac{r^2\sin\alpha}{2} = \frac{r^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)\text{rad}$$

π = konštanta = 3,14 = Ludolfovo číslo

Medzikružie:
Plocha ohraničená dvomi sústredným kružnicami.

$$S = \pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\,(r_1^2 - r_2^2)$$

Opísaná kružnica:

- Kružnica opísaná trojuholníku ABC je kružnica prechádzajúca jeho tromi vrcholmi A, B, C.
- Každému trojuholníku možno opísať kružnicu. Jej stred nájdeme ako priesečník osí strán trojuholníka.

Vpísaná kružnica:

- Kružnica vpísaná trojuholníku ABC je kružnica ležiaca vnútri trojuholníka ABC a dotýkajúca sa všetkých jeho strán.
- Každému trojuholníku možno vpísať jednu kružnicu. Jej stred nájdeme ako priesečník osí uhlov trojuholníka.

Pre polomer opísanej kružnice, polomer vpísanej kružnice a ostatné prvky trojuholníka platia nasledujúce základné vzťahy:

$$r = \frac{abc}{4S}$$

$$\rho = \frac{2S}{o}$$

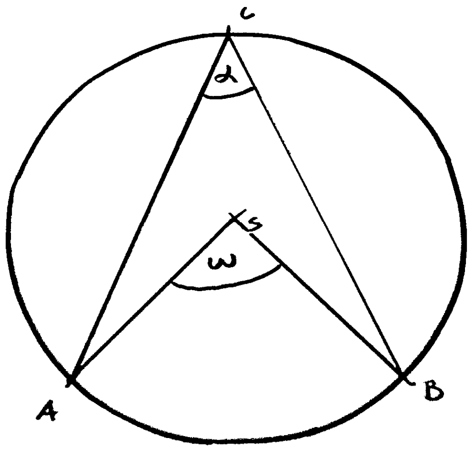
$$2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kde r je polomer opísanej kružnice, ρ je polomer vpísanej kružnice, S je obsah trojuholníka, o je jeho obvod, a, b, c sú dĺžky strán a α, β, γ sú veľkosti vnútorných uhlov.

Veta o obvodovom a stredovom uhle:

- Veľkosť každého obvodového uhla prislúchajúceho oblúku m sa rovná polovici veľkosti stredového uhla prislúchajúceho oblúku m.

- A,B rozdelia k na dva oblúky
- C ľubovoľný bod na k
- Stredový uhol je práve jeden, obvodových je nekonečne veľa



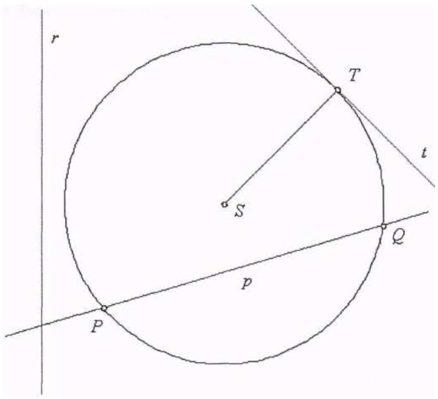
- Špeciálnym prípadom vety o obvodovom a stredovom uhle je Talesova veta, ktorú dostaneme, keď za oblúk *m* zvolíme polkružnicu.

  - **Talesova veta:**
    Všetky obvodové uhly nad priemerom sú pravé.

Tetivy kružnice:

- Každá úsečka MN, ktorej koncové body M a N ležia na kružnici, sa nazýva tetiva kružnice. Priemer PQ je tetiva prechádzajúca stredom S kružnice. Polomer kružnice je každá úsečka SP, SQ, SR, ktorej jeden koncový bod je stred kružnice a druhý leží na kružnici.

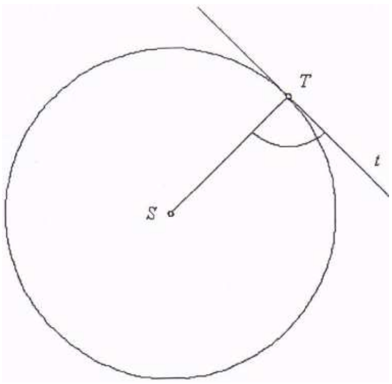
Vzájomná poloha priamky a kružnice:



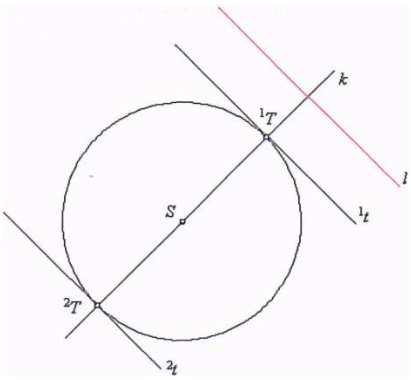
Priamka vo všeobecnej polohe môže:

- pretínať kružnicu v dvoch rôznych bodoch - sečnica kružnice
- dotýkať sa kružnice v jednom spoločnom bode - dotyčnica kružnice
- neobsahovať žiadne body kružnice - nesečnica kružnice.

- Priamka *p* je sečnicou kružnice, priamka *t* jej dotyčnicou a priamka *r* je nesečnicou kružnice.



- **Dotyčnica** ku kružnici je priamka kolmá na polomer kružnice v bode dotyku.
- Dotyčnica kružnice neobsahuje žiadne vnútorné body kružnice.



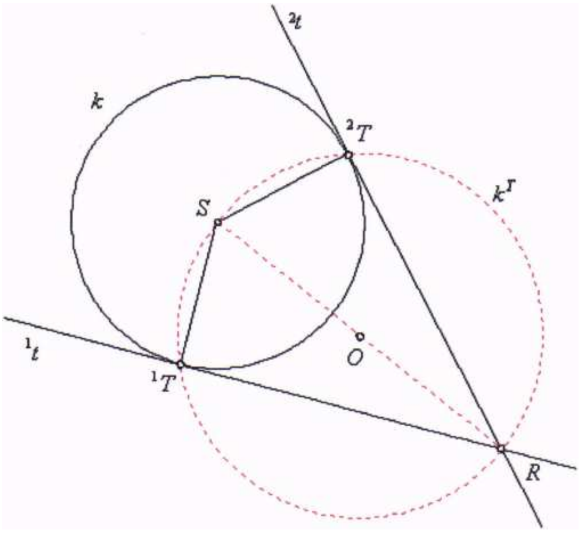
- Existujú práve dve dotyčnice kružnice rovnobežné s danou priamkou**.**

  - Dôkaz:
    Stredom *S* kružnice *k* prechádza jediná kolmica *k* na danú priamku. Priamka *k* je priemer kružnice kolmý na hľadanú dotyčnicu v smere priamky. Pretína kružnicu v dvoch rôznych bodoch, ktoré sú dotykovými bodmi dvoch dotyčníc kružnice v danom smere.

MO 30: KRUŽNICA A JEJ ČASTI

- Existujú práve dve dotyčnice kružnice prechádzajúce jej vonkajším bodom.

  - Dôkaz:
    Dotyčnica kružnice je kolmá ma polomer kružnice v bode dotyku. Trojuholník RST určený stredom kružnice, vonkajším bodom R a bodom dotyku T je preto pravouhlý, s pravým uhlom pri vrchole T a preponou SR. Bod dotyku teda leží na Tálesovej kružnici s priemerom SR. Tálesova kružnica pretína danú kružnicu k v dvoch rôznych bodoch, ktoré sú dotykovými bodmi dvoch dotyčníc prechádzajúcich vonkajším bodom R kružnice.



Vzájomná poloha dvoch kružníc:

Uvažujme dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 > r_2$

- $S_1 \neq S_2$ a $r_1 + r_2 < |S_1S_2|$ - kružnice nemajú spoločné body, každá leží vo vonkajšej oblasti tej druhej
- $S_1 \neq S_2$ a $r_1 + r_2 = |S_1S_2|$ - kružnice majú vonkajší dotyk
- $S_1 \neq S_2$ a $r_1 - r_2 < |S_1S_2| < r_1 + r_2$ – kružnice sa pretínajú v dvoch spoločných bodoch
- $S_1 \neq S_2$, $|S_1S_2| = r_1 - r_2$ – menšia z kružníc leží vo vnútornej oblasti druhej a majú spoločný vnútorný dotyk.
- $S_1 \neq S_2$, $|S_1S_2| < r_1 - r_2$ – menšia z kružníc leží vo vnútornej oblasti druhej a nemajú spoločné body
- $S_1 = S_2$, $r_1 \neq r_2$ – kružnice sú sústredné. Oblasť $\{X \in \rho, r_2 \leq |S_1X| \leq r_1\}$ nazývame medzikružím.
- $S_1 = S_2$, $r_1 = r_2$ – kružnice sú totožné

Veta o mocnosti bodu ku kružnici:

- Nech *k(S,r)* je kružnica v rovine a *M* bod neležiaci na tejto kružnici. Nech *p, q* sú dve sečnice kružnice *k* prechádzajúce bodom *M* a pretínajúce kružnicu *k* v bodoch P_1, P_2, Q_1, Q_2. Potom platí:

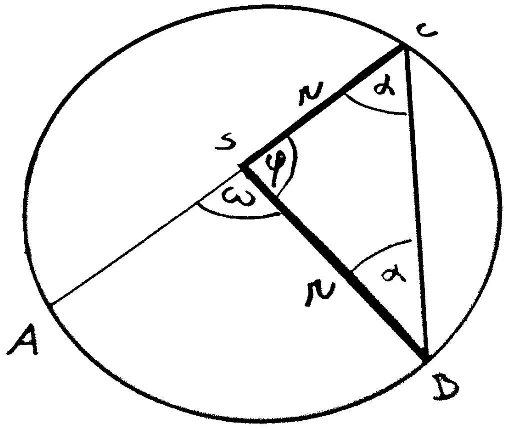
  $|P_1M|\,|P_2M| = |Q_1M|\,|Q_2M| = |SM|^2 - r^2$

Veta o Apolóniovej kružnici:

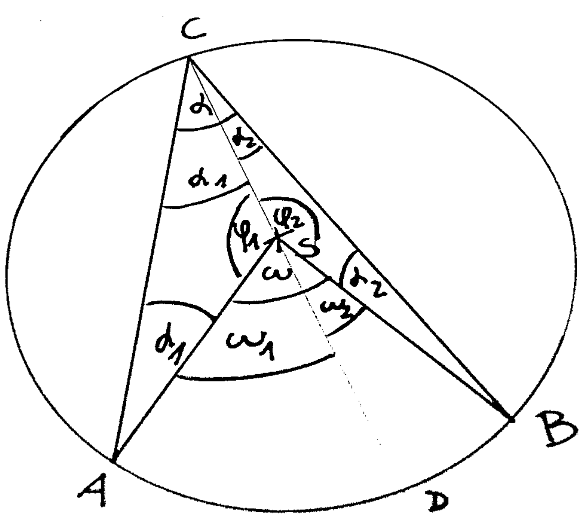
- Nech A, B sú dva body rôzne body roviny, $k \in R^+ - \{1\}$. Množina všetkých bodov X v rovine, pre ktoré platí |AX|=k|BX| je kružnica so stredom na priamke AB. Nazýva sa Apolóniova kružnica.

MO 30: KRUŽNICA A JEJ ČASTI

Dôkaz vety o obvodovom a stredovom uhle



{C}= polpriamka *AS* prienik s *k*
ΔBCS – rovnostranný → uhol SBC= α
Uhol CSB, teda **φ = 180°- 2 α** a zároveň **φ =180°- ω**
→ ω=2 α



Polpriamka *CS* prienik *k*, vznikne bod *D*
ω_1+ ω_2= ω
α_1+ α_2= α
φ_1+φ_2=φ

φ_1=180°-2 α_1=180°-2 ω_1
φ_2=180°-2 α_2=180°-2 ω_2
→ 2 α_1=ω_1
→ 2α_2=ω_2
ω_1+ ω_2=2(α_1+ α_2)=2 α