MO 28:

TELESÁ

Hranol:

- majme v priestore rovinu ρ, v nej konvexný mnohouholník $A_1A_2...A_n$
- nech $A_1´$ je bod, ktorý neleží v ρ
- existuje práve jedno posunutie pri ktorom sa A_1 zobrazí na $A_1´$, rovina ρ na rovinu ρ´ a mnohouholník $A_1A_2...A_n$ sa zobrazí na $A_1´A_2´...A_n´$
- ak bod X postupuje po mnohouholníku $A_1A_2...A_n$, vyplní jeho obraz X´ mnohouholník $A_1´A_2´...A_n´$ a úsečka XX´ (všetky jej body) vytvoria teleso, ktoré sa nazýva hranol
- ak postupuje bod X iba po obvode mnohouholníku, vytvorí úsečka XX´ iba plášť
- hranol sa skladá z bočných stien (rovnobežníkov) a z podstáv.
- steny hranola: bočné steny, podstavy
- $A_1A_2...A_n$, $A_1´A_2´...A_n´$ - podstavy
- podľa hodnoty n rozlišujeme hranol na : trojboký, štvorboký, .. n-boký hranol
- ak smer posunutia je kolmý na rovinu podstavy, hovoríme o kolmom hranole; ak nie, tak je šikmý – kosí hranol
- kolmý hranol, ktorého podstavy sú pravidelný mnohouholník, nazývame pravidelný n-boký hranol
- hranol, ktorého podstavy sú rovnobežníky sa nazýva rovnobežnosten
- rovnobežnosten, ktorého všetky steny sú pravouholníky je kváder; ak každý z pravouholníkov je štvorec, kváder je kockou

Ihlan(kužeľ):

- zvoľme si v priestore rovinu ρ a v nej konvexný mnohouholník $A_1A_2...A_n$ (kruh K s hraničnou kružnicou k a stredom S) a bod V, ktorý neleží v rovine ρ
- množina všetkých bodov všetkých úsečiek VX, kde X postupuje po všetkých bodoch mnohouholníka $A_1A_2...A_n$ (kruhu K), utvorí teleso, ktoré sa nazýva n-boký ihlan (kužeľ)
- V – hlavný vrchol ihlanu (vrchol kužeľa)
- ak sa obmedzíme na iba na tie body X, ktoré ležia na obvode mnohouholníka (kružnice k), vytvoríme plášť ihlanu (kužeľa)
- pravidelný ihlan – podstava je pravidelný mnohouholník a hlavný vrchol má rovnaké vzdialenosti od všetkých bodov
- rotačný kužeľ – ak $SV \perp \rho$

Štvorsten:

- (simplex, tetraéder) – ihlan s podstavou trojuholníka
- ťažisko štvorstena – prienik priamok prechádzajúcich ťažiskom steny štvorstena a protiľahlým vrcholom; ťažisko delí úsečku s krajnými bodmi vo vrchole a ťažisku protiľahlej steny v pomere 3:1

MO 28: TELESÁ

Rotácia okolo priamky – rotačné telesá:

- o telese T v priestore hovoríme, že priamka t je osou jeho rotácie a že je rotačným telesom, ak sa zobrazí samo na seba pri každom otočení okolo priamky t
- ak za množinu U zvolíme pravouholník ABCD, ktorého vrcholy A,B ležia na priamke t, dostaneme rotačný valec s výškou AB a polomerom BC
- ak za množinu U zvolíme pravouhlý trojuholník ABC, ktorého vrcholy A,B ležia na priamke t a pravý uhol je pri vrchole B, dostaneme rotačný kužeľ s výškou AB a polomerom podstavy BC
- ak za množinu U zvolíme polkruh nad priemerom AB, pričom $AB \in p$, dostaneme guľu s priemerom AB

Hranaté telesá:

- hranol, ihlan, zrezaný ihlan

Rotačné:

- valec, kužeľ, zrezaný kužeľ, guľa,

Časti gule:

- guľový odsek, guľový výsek, guľová vrstva, guľový vrchlík a pás

V = objem, S = povrch, Q = obsah plášťa, S_p = obsah podstavy

Hranol:

$V = S_p v$	Kváder	Kocka
$S = 2S_p + Q$	$V = abc$	$V = a^3$
	$S = 2(ab+ac+bc)$	$S = 6a^2$

Ihlan:

$V = \frac{1}{3} S_p v$ $\qquad$ $S = S_p + Q$

Zrezaný ihlan:

$V = \frac{1}{3} v\left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} S_{p2}} + S_{p2}\right)$ $\qquad$ $S = S_{p1} + S_{p2} + Q$

Valec:

$V = \pi r^2 v$ $\qquad$ $S = 2\pi r(r + v)$ $\qquad$ $Q = 2\pi r v$

Kužeľ:

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$ $\qquad$ $S = \pi r(r + s)$ $\qquad$ $Q = \pi r s$

s = strana kužeľa

MO 28: TELESÁ

Zrezaný kužeľ:

$V = \frac{1}{3}\pi v\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$ $S = \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right) + Q$ $Q = \pi s(r_1 + r_2)$

s = strana zrezaného kužeľa

Guľa:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $S = 4\pi r^2$

Guľový odsek:

$V = \frac{1}{6}\pi v\left(3\rho^2 + v^2\right) = \frac{1}{3}\pi v^2\left(3r - v\right)$

ρ = polomer odseku

Guľová vrstva:

$V = \frac{1}{6}\pi v\left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2\right)$

Guľový výsek:

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

Guľový vrchlík a pás:

$S = 2\pi rv$

Objem kosého - šikmého hranola:

$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right).\vec{c}\right|$

Vlastnosti objemu telies:

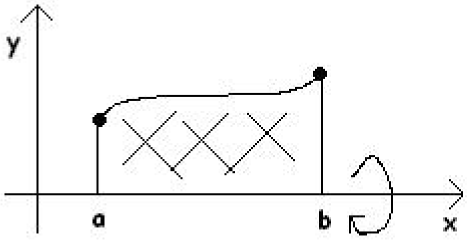
- za jednotku objemu berieme kocku s dĺžkou 1
- dve zhodné telesá majú rovnaký objem
- ak sa teleso T skladá z neprekrývajúcich sa telies T_1, T_2 je objem telesa T súčtom objemov telies T_1, T_2
- Cavalieriho princíp: Telesá T_1,T_2 ležia medzi rovnobežnými rovinami ρ_1, ρ_2

- každá rovina ρ // s rovinami ρ_1, ρ_2 pretne T_1,T_2 v konvexných rovinných útvaroch s obsahmi S_1,S_2
- ak pre každú rovinu ρ platí, že S_1,S_2 majú rovnaký obsah, tak telesá T_1, T_2 majú rovnaký objem

Eulerova veta:

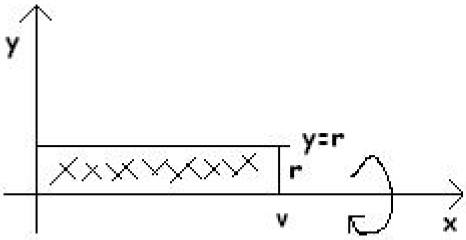
- ak v mnohostene označíme počet stien *s*, počet hrán *h* a počet vrcholov *v*, platí: $s - h + v = 2$

Objem rotačného telesa



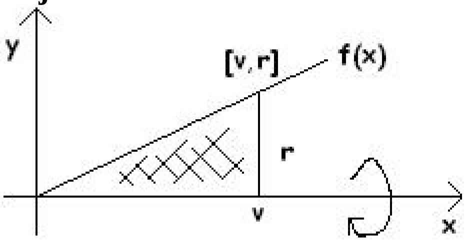
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Objem valca



$$V_V = \pi \int_0^v r^2 dx = \pi \left[r^2 x \right]_0^v = \pi r^2 v$$

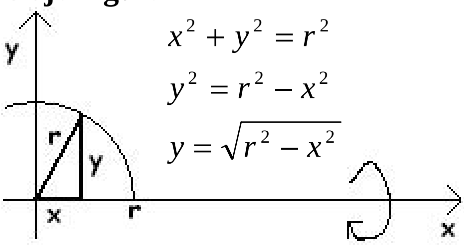
Objem rotačného kužeľa



$$y = kx + q$$
$$y = kx$$
$$k = tg\varphi$$
$$f : y = \frac{r}{v} x$$

$$V_K = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v} x \right)^2 dx = \pi \left[\frac{r^2}{v^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^v = \pi \frac{r^2}{v^2} \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

Objem gule

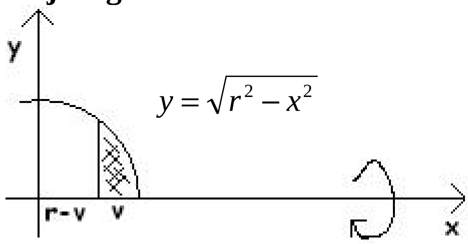


$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$V_G = 2\pi \int_0^v \left(r^2 - x^2 \right) dx = 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} \right]_0^v = 2\pi \frac{2}{3} r^3 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

MO 28: TELESÁ

Objem guľového odseku

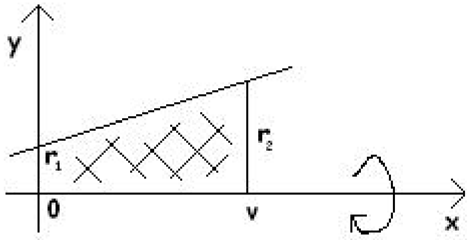


$$V_{Go}=\pi\int_{r-v}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{r-v}^{r}=\pi\left[r^3-\frac{x^3}{3}-\left(r^2(r-v)-\frac{(r-v)^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\pi\left[\frac{2}{3}r^3-\left(\frac{r-v}{3}\right)\left(3r^2-(r-v)^2\right)\right]=\frac{\pi}{3}\left[2r^3-(r-v)\left(2r^2+2rv-v^2\right)\right]=\ldots=$$

$$=\frac{\pi}{3}v\left(3rv-v^2\right)=\frac{\pi}{3}v^2(3r-v)$$

Objem zrezaného rotačného kužeľa



$$y=ax+b$$

$$r_1=b$$

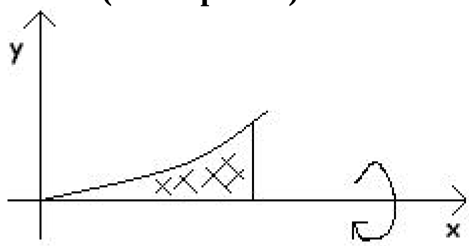
$$r_2=va+b\Rightarrow a=\frac{r_1-r_2}{v}$$

$$y=\frac{r_1-r_2}{v}x+r_1$$

$$V_{rK}=\pi\int_0^v\left(\frac{r_2-r_1}{v}x+r_1\right)^2dx=\pi\int_0^v\left[\left(\frac{r_2-r_1}{v}\right)^2x^2+2\frac{r_2-r_1}{v}r_1x+r_1^2\right]dx=$$

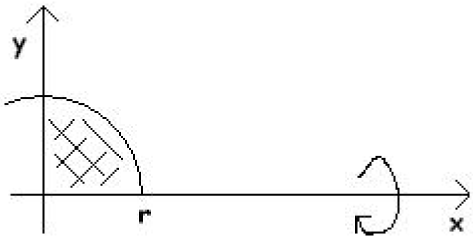
$$=\pi\left[\left(\frac{r_2-r_1}{v}\right)^2\frac{x^3}{3}+\frac{r_2-r_1}{v}r_1x^2+r_1^2x\right]_0^v=\frac{1}{2}\pi v\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$$

Povrch(obsah plášťa) rotačného telesa



$$Q=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

Povrch gule



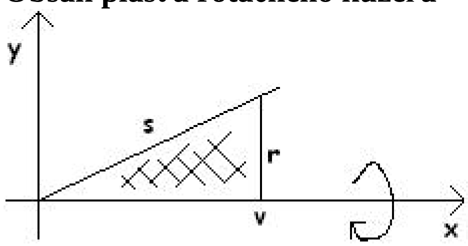
$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$y'^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}$$

$$Q = 2\pi 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}dx = 4\pi r\int_0^r \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2}}dx = 4\pi r\int_0^r 1dx = 4\pi r[x]_0^r = 4\pi r^2$$

Obsah plášťa rotačného kužeľa



$$y = \frac{r}{v}x$$

$$y' = \frac{r}{v}$$

$$y'^2 = \frac{r^2}{v^2}$$

$$s = \sqrt{r^2 + v^2}$$

$$Q = 2\pi\int_0^v \frac{r}{v}x\sqrt{1 + \frac{r^2}{v^2}}dx = 2\pi\frac{r}{v}\int_0^v x\sqrt{\frac{r^2 + v^2}{v^2}}dx = 2\pi\frac{r}{v^2}\int_0^v x\sqrt{r^2 + v^2}dx = 2\pi\frac{r}{v^2}s\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^v =$$

$$= 2\pi\frac{r}{v^2}\frac{v^2}{2} = \pi rs$$